CMA111: Cálculo 1A

Prof. Alberto Ramos

Abril de 2018

Orientações gerais
1) As soluções devem conter o desenvolvimento e ou justificativa.
2) A interpretação das questões é parte importante do processo de avaliação. Organização e capricho também serão avaliados.
3) Não é permitido a consulta nem a comunicação entre alunos.

Questão 1 .... $\boxed{50}$

Calcule os seguintes limites (**Proibido usar o L'hospital para o cálculo de limites.**)

(a) (10 points) $\lim_{x\to -1} \dfrac{4x^5+x^2+6}{x^4+2}$

Solution: Como o denominador é diferente de zero quando $x=-1$ temos que

$$\lim_{x\to -1} \frac{4x^5+x^2+6}{x^4+2} = \frac{4(-1)^5+(-1)^2+6}{(-1)^4+2} = \frac{-4+1+6}{1+2} = \frac{3}{3} = 1.$$

(b) (10 points) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}$

Solution: Indeterminação 0/0. Assim, vamos multiplicar adequadamente para eliminar dita determinação. Multiplicando adequadamente temos que

$$\frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2} = \left(\frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}\right)\left(\frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+6}+3}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\right) = \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+6}+3}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{4}{6}.$$

(c) (10 points) $\lim_{x\to 0^+} (e^x+4x)^{\frac{1}{x}}$

Solution: Temos indeterminação $1^{\frac{1}{\infty}}$. A ideia é usar $\lim_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$. Para isso vamos re-escrever $(e^x+4x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+4x)}$. Assim, basta calcular $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\ln(e^x+4x)$. Portanto,

$$\frac{1}{x}\ln(e^x+4x) = \frac{1}{x}\frac{\ln(1+e^x+4x-1)}{e^x+4x-1}(e^x+4x-1) = \frac{\ln(1+e^x+4x-1)}{e^x+4x-1}\frac{e^x-1+4x}{x}.$$

Agora, procederemos a calcular cada limite por separado

A $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+e^x+4x-1)}{e^x+4x-1} = 1$. Bastar notar que quando $x\to 0^+$, $u := e^x+4x-1 \to 0$ e logo fazendo mudança de variável $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+e^x+4x-1)}{e^x+4x-1} = \lim_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$.

B $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1+4x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1}{x} + 4 = 1+4 = 5.$

Usando as regras de cálculo para limites

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln(e^x+4x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+e^x+4x-1)}{e^x+4x-1}.\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1+4x}{x}=1.5=5$$

Finalmente, $\lim_{x\to 0^+}(e^x+4x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln(e^x+4x)}=e^5.$

(d) (10 points) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\tan(x).$ [1]

Solution: Indeterminação 0∞. Vamos re-escrever a expressão para eliminar a indeterminação. Faça a mudança de variável $-y=\frac{\pi}{2}-x$. Observe que se $x\to\pi/2$, temos que $y\to 0$. Calculando,

$$(\frac{\pi}{2}-x)\tan(x)=-y\frac{\sin(\pi/2+y)}{\cos(\pi/2+y)}=-y\frac{\cos(y)}{-\sin(y)}=\frac{\cos(y)}{\frac{\sin(y)}{y}}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\tan(x)=\lim_{y\to 0}\frac{\cos(y)}{\left(\frac{\sin(y)}{y}\right)}=\frac{\cos(0)}{1}=1.$$

(e) (10 points) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x(x+4)}-x$

Solution: Indeterminação $\infty-\infty$. Assim,

$$\sqrt{x(x+4)}-x=\frac{\sqrt{x(x+4)}+x}{\sqrt{x(x+4)}+x}\left(\sqrt{x(x+4)}-x\right)=\frac{4x}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+1\right)}=\frac{4}{\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+1\right)}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x(x+4)}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+1\right)}=\frac{4}{\sqrt{1}+1}=2.$$

Questão 2 .... $\boxed{20}$

Determine os valores de a e b para que a seguinte função seja contínua em $x=8$.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}[\![x-6]\!] & \text{, se } x<8\\ ab & \text{, se } x=8\\ \frac{2}{b|2x-7|} & \text{, se } x>8\end{cases}$$

Solution: Primeiro, calculemos os limites laterais quando x tende a 8.

1. *Limite a direita.* Observe que

$$\lim_{x\to 8^+}f(x)=\lim_{x\to 8^+}\frac{2}{b|2x-7|}=\frac{2}{b|2.8-7|}=\frac{2}{9b}$$

[1]Lembre que $\sin(\frac{\pi}{2}+y)=\cos(y)$ e $\cos(\frac{\pi}{2}+y)=-\sin(y)$ para todo $y\in\mathbb{R}$.

2. *Limite a esquerda.* Como $[\![x]\!]$ é uma função definida por partes, vamos analisar o que acontece com $f(x)$ quando $x \in (7,8)$. Se $7 < x < 8$, então $1 < x-6 < 2$ e assim $[\![x-6]\!] = 1$. Desta observação, temos que $f(x) = \frac{1}{8}[\![x-6]\!] = \frac{1}{8}$ para todo x tal que $7 < x < 8$. Logo

$$\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^-} \frac{1}{8}[\![x-6]\!] = \lim_{x\to 8^-} \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

3. *O limite $\lim\limits_{x\to 8} f(x)$ deve existir.* Assim, o limite a direita e o limite a esquerda são iguais o que implica que $\frac{1}{8} = \frac{2}{9b}$ e portanto $b = \frac{16}{9}$ e $\lim\limits_{x\to 8} f(x) = \frac{1}{8}$.

4. *O limite $\lim\limits_{x\to 8} f(x)$ coincide com $f(8)$* . Assim, $f(8) = ab = \frac{1}{8}$. Assim, $a = \frac{1}{8b} = \frac{9}{8.16} = \frac{9}{128}$.

Questão 3 .... $\boxed{15}$

Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções tais que $|\sin(x)| \leq g(x) \leq 4|x|$ e $0 \leq f(x) \leq 1 + |\sin(1/x)|$, $\forall x \neq 0$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)$.

Solution: Como ambas funções são não-negativas, quando multiplicamos $f(x)$ com $g(x)$, a ordem das desigualdades se mantem. Portanto,

$$0 \leq f(x)g(x) \leq (1 + |\sin(\frac{1}{x})|)(4|x|) \leq 2.4|x| = 8|x|,$$

onde na terceira desigualdades temos usado que $|\sin(y)| \leq 1$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Como $\lim\limits_{x\to 0} 8|x| = 0$, podemos usar o Teorema do Confronto, para afirmar que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$. Observe que não sabemos se o limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe ou não.

Questão 4 .... $\boxed{15}$

Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{, se } x \leq 0 \\ x + 2 & \text{, se } x > 0 \end{cases}$$

Calcule os limites laterais $\lim\limits_{x\to -1^+} (f \circ f)(x)$ e $\lim\limits_{x\to -1^-} (f \circ f)(x)$. Existe o limite $\lim\limits_{x\to -1} (f \circ f)(x)$?

Solution: Observe que f não é contínua em $x = 0$. Assim, devemos analisar por partes. Primeiro, calculemos os limites laterais.

1. *Limite a direita:* $\lim\limits_{x\to -1^+} (f\circ f)(x)$. Considere $x \in (-1,0)$, assim pela regra de correspondência $f(x) = x^2 - 1$, mas como $x^2 < 1$ para todo $x \in (-1,0)$ temos que $f(x) = x^2 - 1$ é negativo ($f(x) < 0$) e como consequência $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f^2(x) - 1 = (x^2-1)^2 - 1$. Calculando limite

$$\lim_{x\to -1^+} (f \circ f)(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2-1)^2 - 1 = ((-1)^2 - 1)^2 - 1 = -1.$$

2. *Limite a esquerda:* $\lim\limits_{x\to -1^-} (f \circ f)(x)$. Considere $x \in (-2,-1)$. Como $x < 0$ temos que $f(x) = x^2 - 1$. Quando x pertence a $(-2,-1)$ temos que $f(x) = x^2 - 1$ é positivo ($f(x) > 0$)

e como consequência da regra de correspondência $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) + 2 = (x^2 - 1) + 2 = x^2 + 1$. Calculando limite

$$\lim_{x \to -1^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \to -1^-} x^2 + 1 = (-1)^2 + 1 = 2.$$

O limite não existe pois ambos limites laterais são diferentes.

Questão 5 .... $\boxed{10}$

Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \in [0,1]$ para todo x. Então, mostre que existe um $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

Solution: Defina $g(x) := f(x) - x$. Como g é a diferença de duas funções contínuas, temos que g é contínua. Como $f(x) \in [0,1]$. Temos que $g(0) = f(0) \geq 0$ e que $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Logo, do Teorema do Valor Intermediario, temos que existe um $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = 0$. Isto é, $g(c) = f(c) - c = 0$ ou $f(c) = c$.